

## Лекция 9

**Методы численного решения  
дифференциальных и  
интегральных уравнений**

# Вопросы лекции

1. Основные понятия в области дифференциальных и интегральных уравнений.
2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Методы решения уравнений с частными производными.

## Вопрос 1.

**Основные понятия  
в области дифференциальных и  
интегральных уравнений**

**1. Постановка задач.** Инженеру-исследователю постоянно приходится в своей деятельности сталкиваться с дифференциальными уравнениями. Многие задачи механики, физики, химии и других отраслей науки и техники при их математическом моделировании сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники.

В зависимости от числа независимых переменных дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных.

К интегральным уравнениям приводят многие инженерные задачи (в радиотехнике, газовой динамике, квантовой механике и т. п.). Интегральная форма уравнений движения в виде законов сохранения используется также и при построении консервативных разностных схем для некоторых типов задач (в частности, в механике сплошной среды).

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функций  $y = y(x)$ . Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (7.1)$$

где  $x$  — независимая переменная.

Наивысший порядок  $n$  входящей в уравнение (7.1) производной называется *порядком дифференциального уравнения*. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

В ряде случаев из общей записи дифференциального уравнения (7.1) удастся выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= f(x, y, y'). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Такая форма записи называется *уравнением, разрешенным относительно старшей производной*.

*Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных. Например,  $y' - x^2y = \sin x$  — линейное уравнение первого порядка.

*Решением* дифференциального уравнения (7.1) называется всякая  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

*Общее решение* обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (7.1) содержит  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (7.3)$$

где (7.3) является решением уравнения (7.1) при любых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , а любое решение уравнения (7.1) можно представить в виде (7.3) при некоторых  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

*Частное решение* дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi(x, C). \quad (7.4)$$

Если постоянная принимает определенное значение  $C = C_0$ , то получается частное решение

$$y = \varphi(x, C_0).$$



В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках.

Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются *начальными условиями*, а точка  $x = x_0$ , в которой они задаются, — *начальной точкой*.

Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши: для заданных  $x_0, y_0$  найти такое решение  $y = y(x)$  уравнения (7.2), что  $y(x_0) = y_0$ . Таким образом, теорема Коши дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

Если же для уравнения порядка  $n > 1$  дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются при этом *граничными (или краевыми) условиями*. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках  $x = a$  и  $x = b$ , являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение.

# Пример численного решения однородного дифференциального уравнения

## Прогноз погоды в Санкт-Петербурге на месяц

Другой город

30 дней

Погода по месяцам:

Январь

Февраль

Март

Апрель

Май

Июнь

Июль

Август

Сентябрь

Октябрь

Ноябрь

Декабрь





Во многих практических задачах искомые функции зависят от нескольких переменных, и описывающие такие задачи уравнения могут содержать частные производные искомым функций. Они называются уравнениями с частными производными.

К решению дифференциальных уравнений с частными производными приводят, например, многие задачи механики сплошных сред. Здесь в качестве искомым функций обычно служат плотность, температура, напряжение и др., аргументами которых являются координаты рассматриваемой точки пространства, а также время.

Полная математическая постановка задачи наряду с дифференциальными уравнениями содержит также некоторые дополнительные условия. Если решение ищется в ограниченной области, то задаются условия на ее границе, называемые *граничными (краевыми) условиями*. Такие задачи называются *краевыми задачами* для уравнений с частными производными.

Если одной из независимых переменных в рассматриваемой задаче является время  $t$ , то задаются некоторые условия (например, значения искомым параметров) в начальный момент  $t_0$ , называемые *начальными условиями*. Задача, которая состоит в решении уравнения при заданных начальных условиях, называется задачей Коши для уравнения с частными производными. При этом задача решается в неограниченном пространстве и граничные условия не задаются. Задачи, при формулировке которых ставятся граничные и начальные условия, называются нестационарными (или смешанными) краевыми задачами. Получающиеся при этом решения меняются с течением времени.

Мы будем рассматривать лишь достаточно узкий класс задач для уравнений первого и второго порядков, линейных относительно производных. (Напомним, что порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной.) В случае двух независимых переменных  $x, y$  эти уравнения можно записать в виде

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g. \quad (8.1)$$

Здесь  $u = u(x, y)$  — искомая функция. Коэффициенты  $a, b, c, d, e, f$  и правая часть  $g$ , вообще говоря, могут зависеть от переменных  $x, y$  и искомой функции  $u$ . В связи с этим уравнение (8.1) может быть: а) с постоянными коэффициентами; б) линейным, если  $g$  линейно зависит от  $u$ , а коэффициенты зависят только от  $x, y$ ; в) квазилинейным, если коэффициенты зависят от  $u$ ; это самый общий вид уравнения (8.1).

Существуют различные виды уравнений в зависимости от соотношения между коэффициентами. Рассмотрим некоторые из них. При  $a=b=c=f=0$ ,  $d \neq 0$ ,  $e \neq 0$  получается уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} = q,$$

называемое *уравнением переноса*. На практике в этом уравнении одной из переменных может быть время  $t$ . Тогда его называют также *эволюционным уравнением*.

Если хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отличен от нуля, то (8.1) является уравнением второго порядка. В зависимости от знака дискриминанта  $D = b^2 - ac$  оно может принадлежать к одному из трех типов: *гиперболическому* ( $D > 0$ ), *параболическому* ( $D = 0$ ) или *эллиптическому* ( $D < 0$ ).

Приведем примеры уравнений с частными производными второго порядка, которые будем в дальнейшем рассматривать:

*волновое уравнение* (гиперболическое)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

*уравнение теплопроводности* или *диффузии* (параболическое)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0;$$

*уравнение Лапласа* (эллиптическое)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если правая часть последнего уравнения отлична от нуля, то оно называется *уравнением Пуассона*.

Приведенные уравнения называются *уравнениями математической физики*. К их решению сводятся многие прикладные задачи.



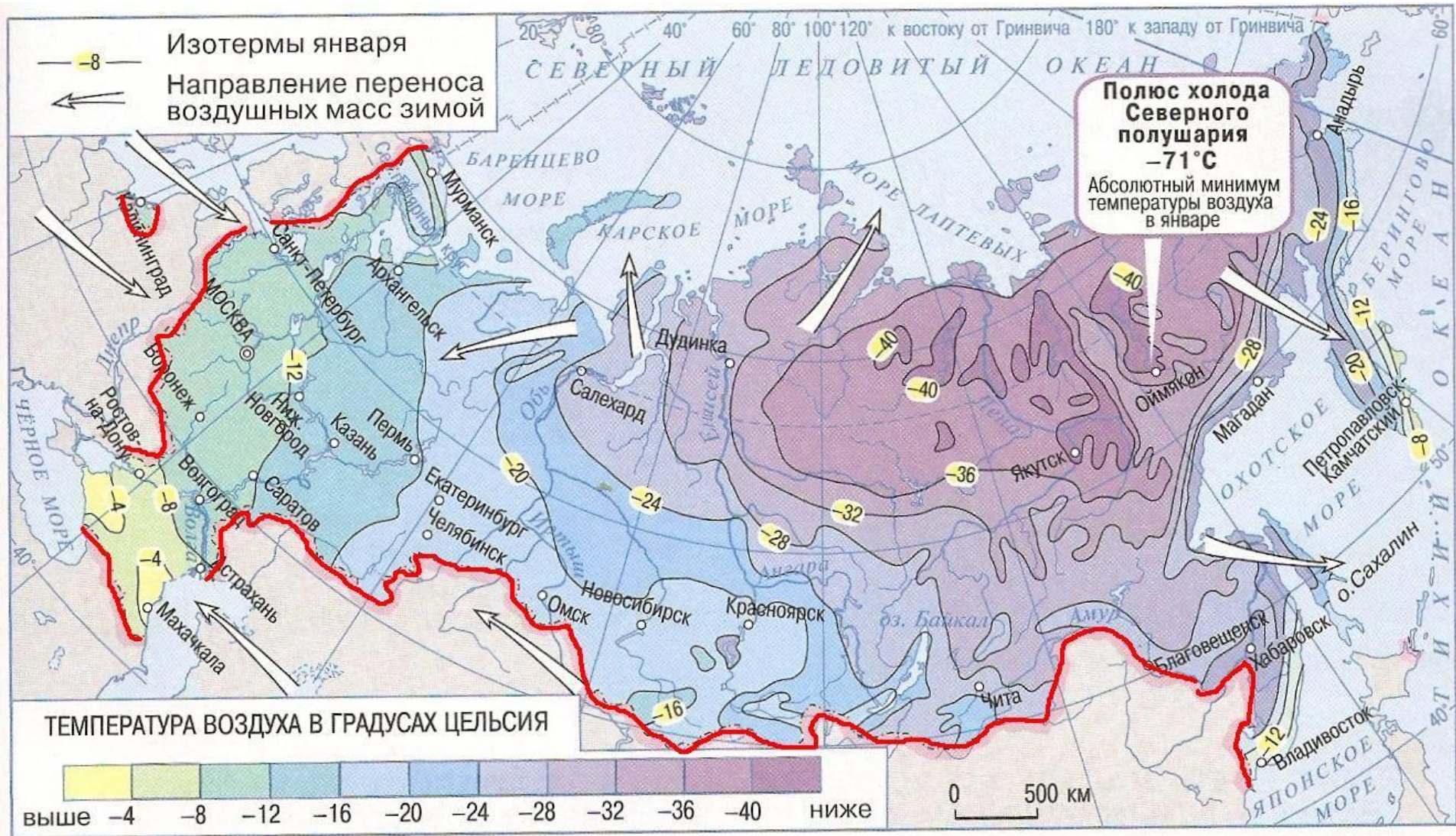


Рис. 41. Средние температуры воздуха в январе



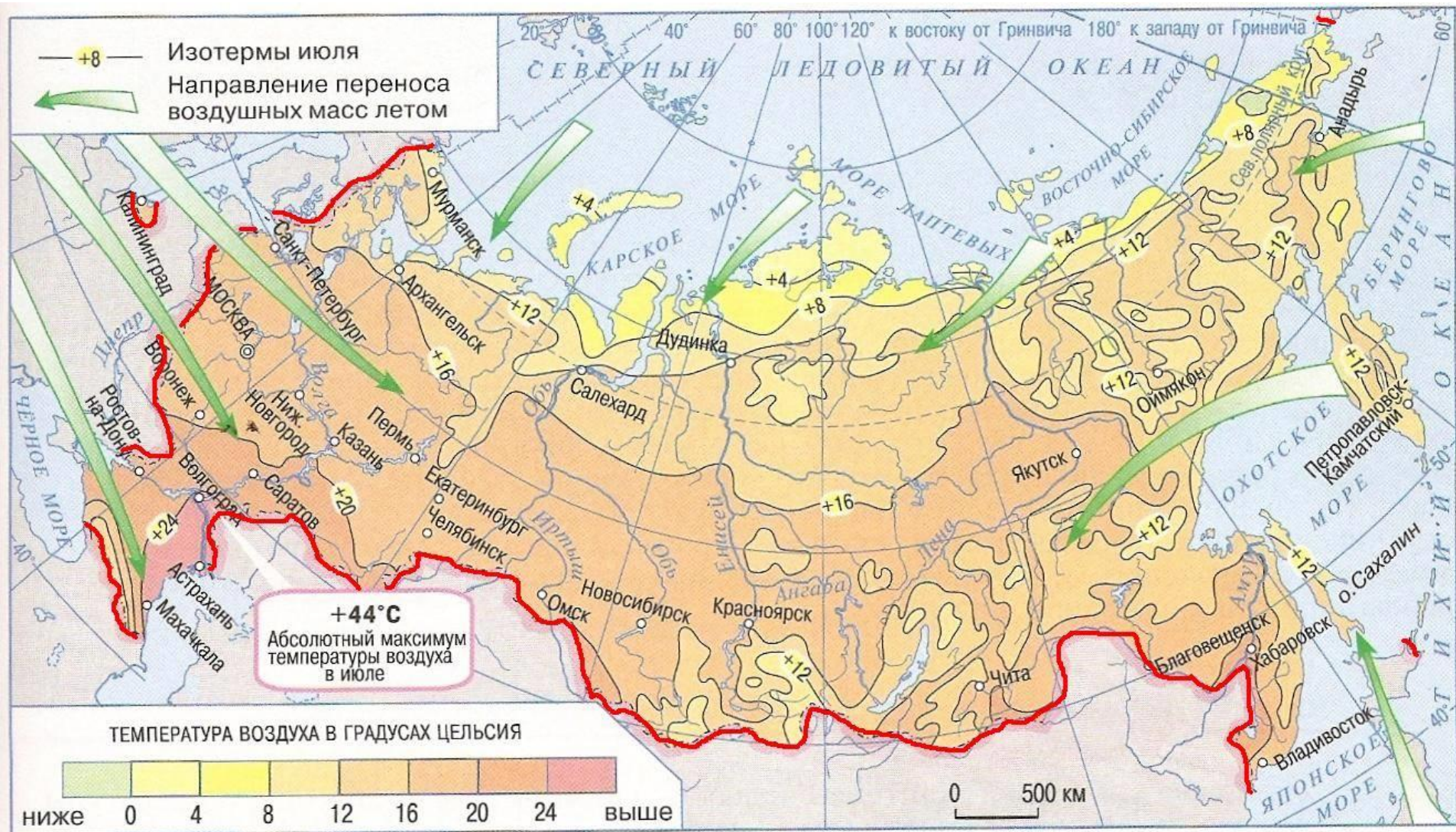


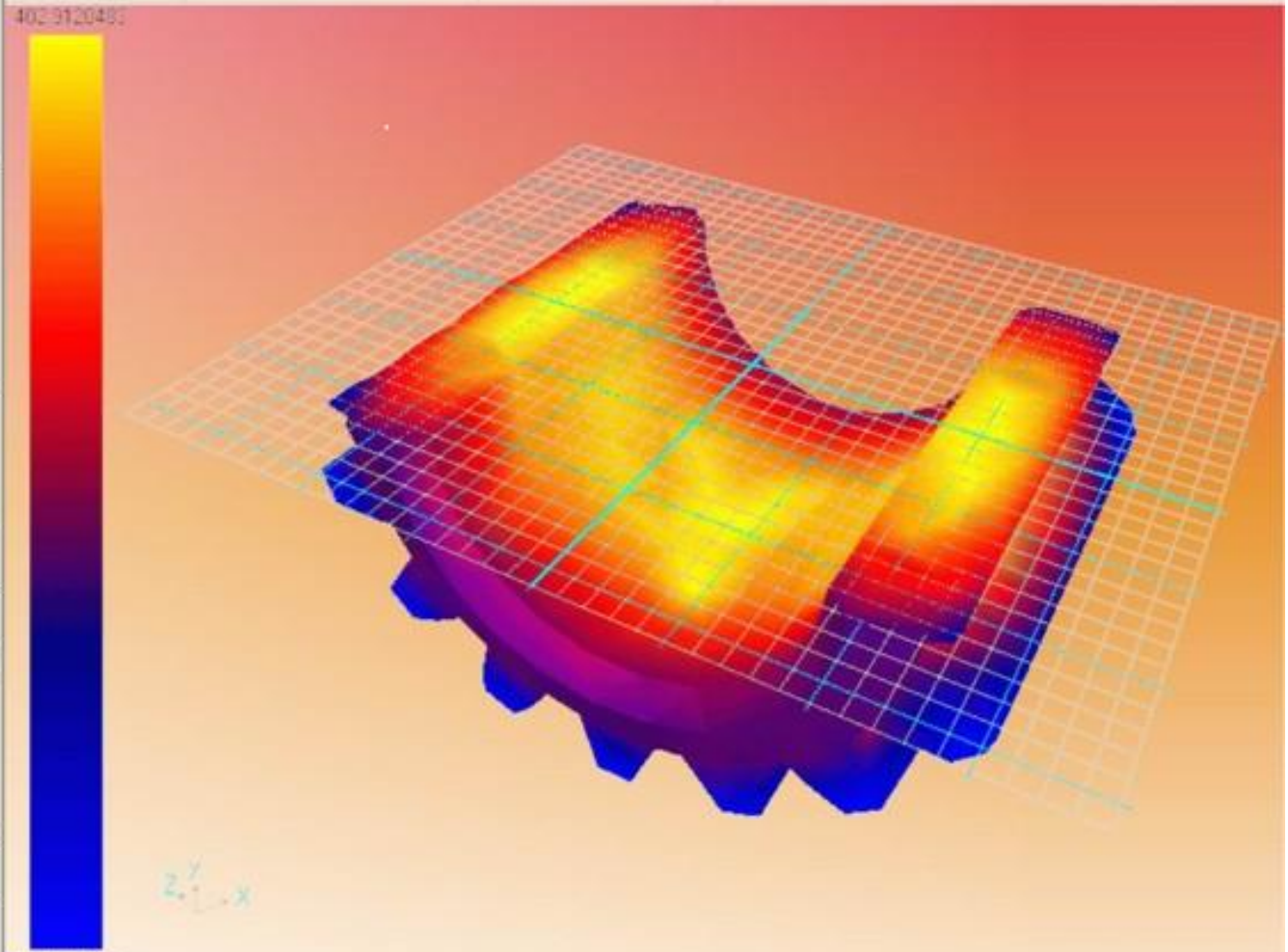
Рис. 43. Средние температуры воздуха в июле



- Файл КМТП - ThermoSim Окна
- Среда моделирования
  - КМТП - ThermoSim
    - КМТП - ThermoSim / Закалка - Project1
      - Геометрия
        - Поверхность
        - Объем
      - Материал
        - Сталь 45
          - Альтернативные наименования
            - ANSI 1045
          - Фазы
            - Аустенит
            - Мартенсит
            - Феррит
            - Общие свойства
          - Дополнительные свойства
            - Коэффициент теплообмена
            - Изотермические диаграммы
            - Охлаждение
      - Параметры процесса
        - t=0 Начальные условия
          - Начальная температура: 900 [г]
        - Окружающая среда ( )
          - Температура окружающей сре.
          - Коэффициент теплообмена
            - Размерность X: Температу
            - Размерность Y: Коэффици
      - Решения
      - Результаты
        - шестерня (28.01.2006 16:09)
          - Температура
      - Окна
        - Окно - Температура - шестерня (28
    - КМТП - ThermoSim - База данных XML
      - Конструкционная углеродистая качествен
      - Окна

Перспектива Освещение Прозрачность  $\frac{Y}{Z}$   $\frac{XZ}{XY}$   $\frac{X}{Y}$   $\frac{Y}{X}$   $\frac{Z}{Y}$   $\frac{Y}{Z}$

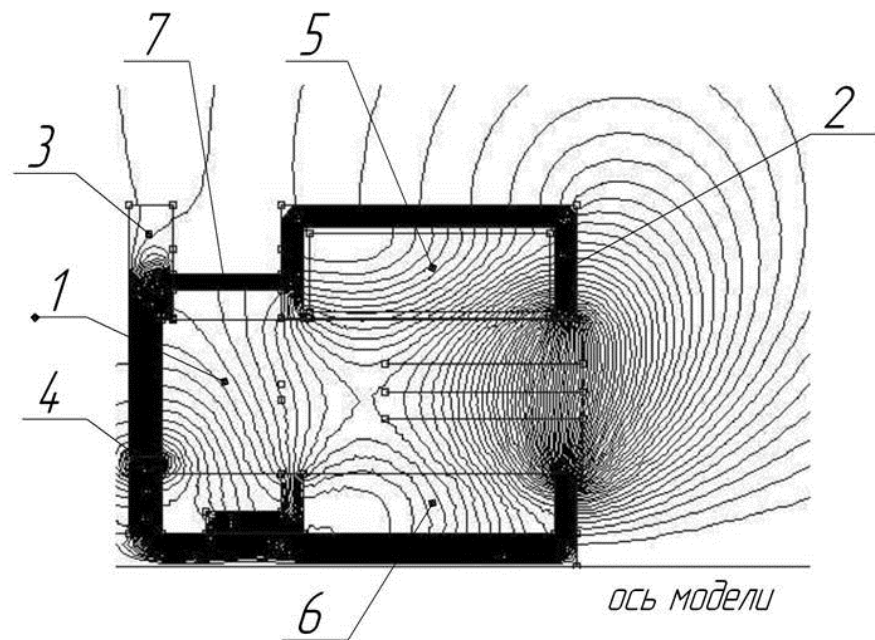
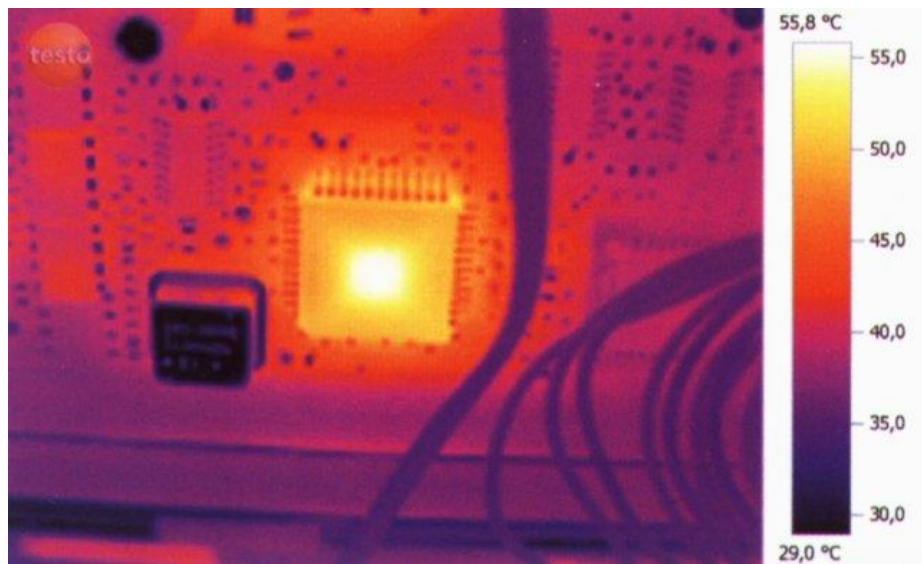
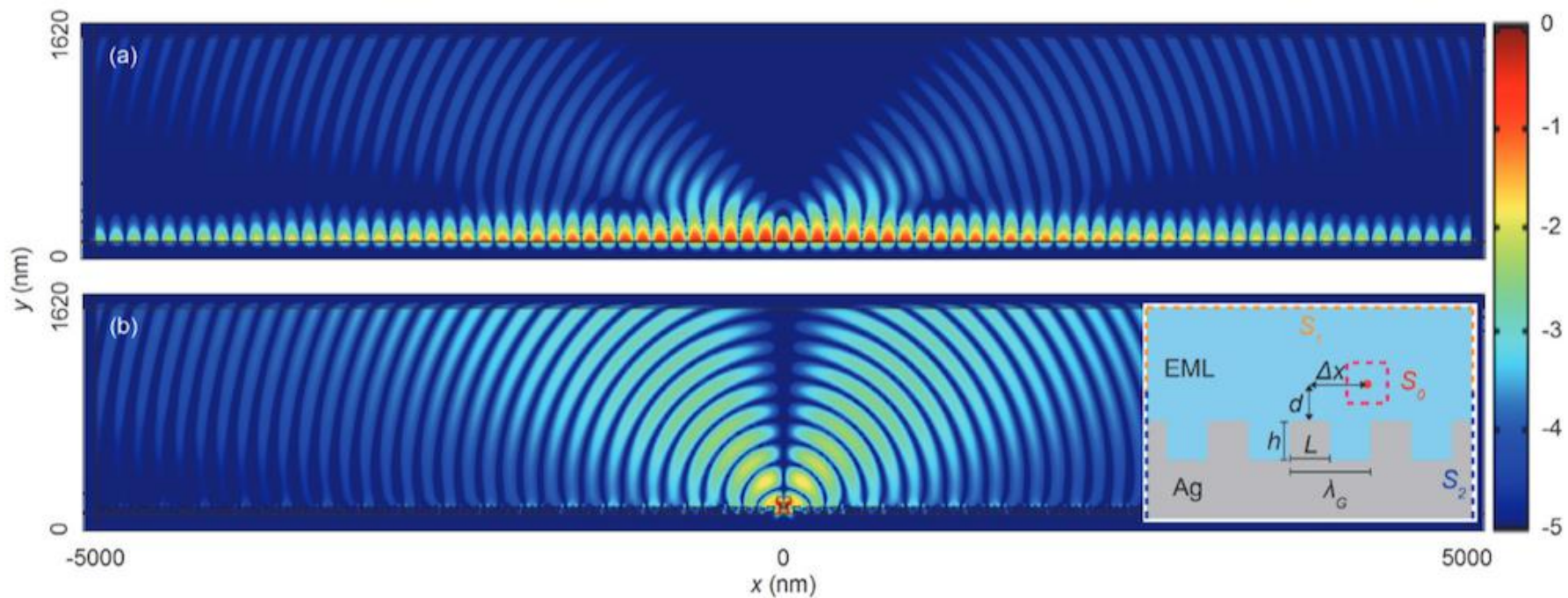
Создать сечение XY YZ XZ Инвертировать Завершить Отменить Сброс



Настройка. Время: 14,33

Настройка отображения ▾ Файл: D:\Work\KmtFramework\Projects\Project1\soliter.tsp





Интегральным уравнением называется такое уравнение, неизвестная функция в котором содержится под знаком интеграла. В общем случае интегральное уравнение имеет вид

$$\int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b. \quad (9.1)$$

Здесь  $x$  — независимая переменная,  $y(x)$  — искомая функция,  $K(x, s, y)$  — *ядро* интегрального уравнения,  $f(x, y)$  — правая часть уравнения,  $s$  — переменная интегрирования.

К интегральным уравнениям приводят многие инженерные задачи (в радиотехнике, газовой динамике, квантовой механике и т. п.). Интегральная форма уравнений движения в виде законов сохранения используется также и при построении консервативных разностных схем для некоторых типов задач (в частности, в механике сплошной среды).

Для решения некоторых задач удобнее использовать интегральные уравнения, чем дифференциальные. Например, постановку задачи Коши

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

можно представить в виде интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Таким образом, интегральное уравнение содержит полную постановку задачи, и дополнительные условия (начальные или граничные) для него задавать не нужно.

Отметим еще одно преимущество интегральных уравнений. Уравнение (9.1) записано для случая одной независимой переменной  $x$ . Однако легко записать его многомерный аналог при наличии независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для некоторой области  $G$  в рассматриваемом  $n$ -мерном пространстве многомерное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\int_G K(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n, y(s_1, \dots, s_n)) ds_1 \dots ds_n = f(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)).$$

Методы решения одномерных уравнений естественно обобщаются на случай многомерных интегральных уравнений (одномерные интегралы заменяются многомерными). В то же время при рассмотрении дифференциальных уравнений переход от одномерного случая (обыкновенные уравнения) к многомерному (уравнения с частными производными) требует совершенно других подходов и методов решения.

**Виды интегральных уравнений.** Ограничимся рассмотрением одномерных уравнений (9.1). Приведем некоторые частные случаи таких уравнений, которые, с одной стороны, важны в практических приложениях и, с другой стороны, наиболее изучены.

Уравнения (9.1), в которые искомая функция входит линейно, называются *линейными интегральными уравнениями*. Одним из них является *уравнение Фредгольма первого рода*

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (9.2)$$

*Уравнение Фредгольма второго рода* имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (9.3)$$

В уравнениях Фредгольма ядро  $K(x, s)$  определено и ограничено на квадрате  $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$ . Если  $K(x, s) = 0$  при  $s > x$ , т. е. ядро отлично от нуля только на треугольнике  $a \leq s \leq x, a \leq x \leq b$ , то уравнения (9.2) и (9.3) переходят в *уравнения Вольтерра* соответственно *первого* и *второго* рода:

$$\int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (9.4)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x). \quad (9.5)$$

## Вопрос 2

**Методы решения обыкновенных  
дифференциальных уравнений**

Основной учебник. Стр.194-223

## Вопрос 3

**Методы решения уравнений с  
частными производными**



Основной учебник. Стр.224-270

**Конец лекции**